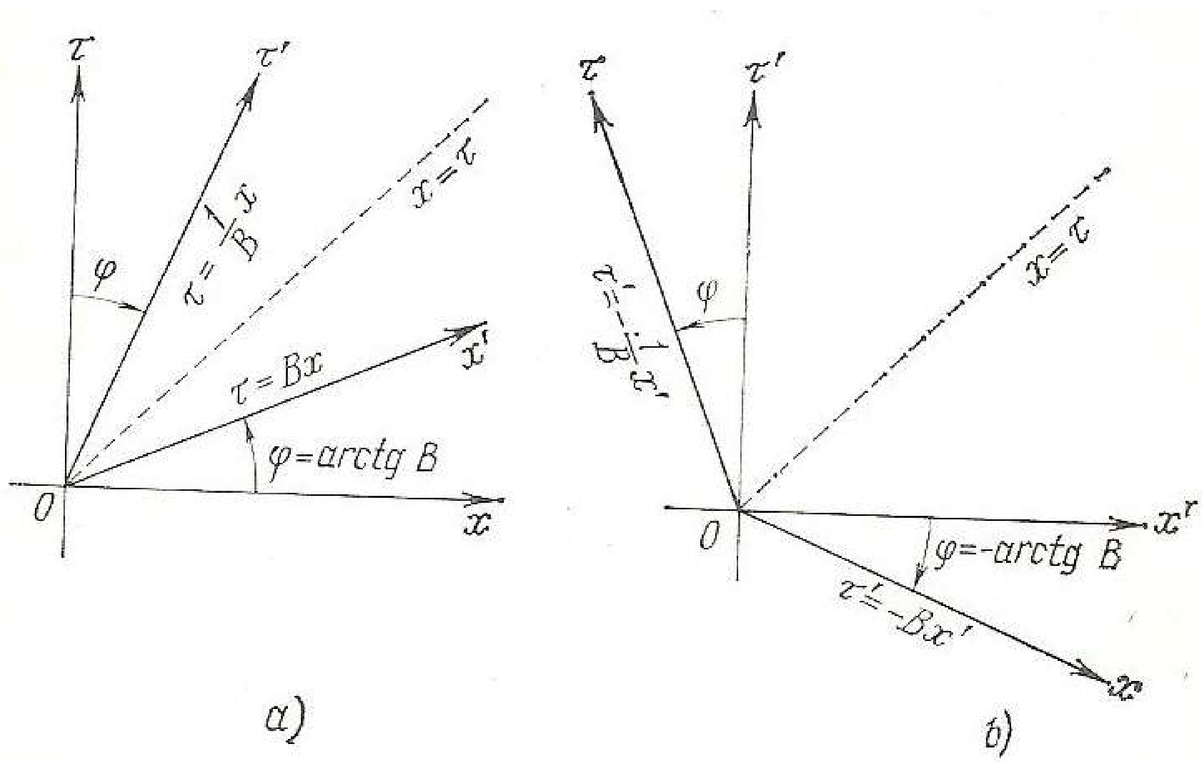

Fig. 2.6. Un'illustrazione geometrica delle trasformazioni di Lorentz. Esse si riducono ad una rotazione degli assi x e τ di un angolo $\varphi = \text{arctg B}$ attorno all'origine nella direzione della bisettrice dell'angolo coordinato verso la posizione finale x', τ'. Le rette $x' =$ costante sono ora parallele all'asse $O\tau'$ e le rette $\tau' =$ costante sono parallele all'asse Ox' (siamo passati al sistema di coordinate rettilineo ma obliquo). Il passaggio da K a K' corrisponde alla convergenza degli assi τ' e x' (a); il passaggio inverso alla divergenza degli assi τ e x (b).

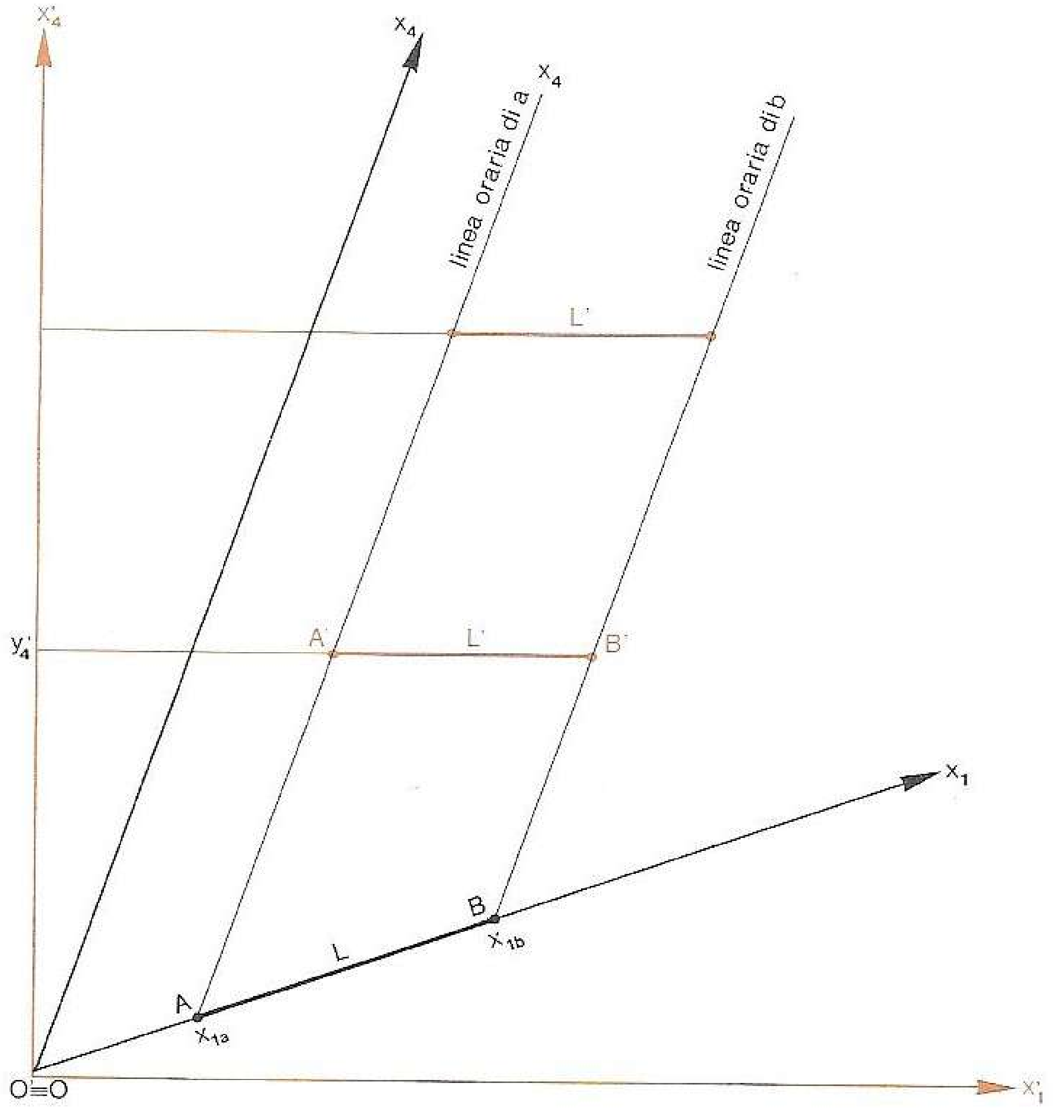

Fig. 23. *Contrazione delle lunghezze.*
La sbarra di estremi a, b, *ferma rispetto a* $\mathcal{O}$, *è disposta lungo la direzione del moto. La figura illustra nel piano* $\mathbb{M}^2$ *di* $\mathcal{O}'$ *il moto della sbarra, e mostra geometricamente l'effetto di contrazione: la lunghezza del segmento* A'B' *è chiaramente inferiore a quella di* AB, *e non dipende dall'istante* y'_4.

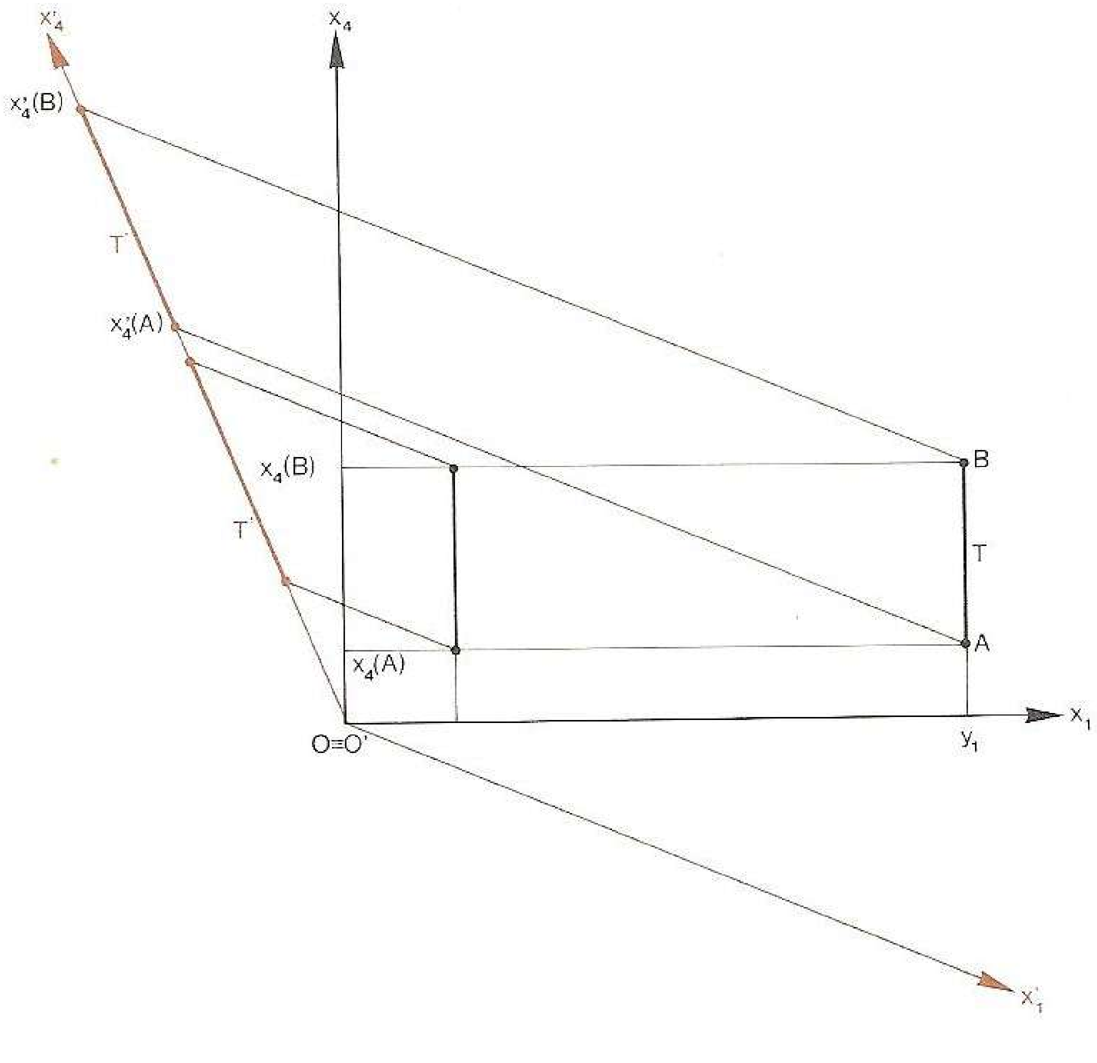

Fig. 24. *Dilatazione dei tempi.*
Gli eventi A, B *corrispondono a due diverse posizioni* x_4 (A), x_4 (B) *delle lancette dell'orologio di* $\mathcal{O}$ *situato in* y_1. *L'intervallo di tempo proprio tra* A *e* B *misurato da* $\mathcal{O}$ *è quindi* $T = x_4(B) - x_4(A)$; $\mathcal{O}'$, *che vede* $\mathcal{O}$ *muoversi con velocità* v, *misura invece un intervallo di tempo* T' *maggiore:* $T' = x'_4(B) - x'_4(A) = T / \sqrt{1 - \beta^2}$. *La figura illustra geometricamente tale effetto, e mostra che* T' *non dipende dalla posizione* y_1 *in cui è posto l'orologio di* $\mathcal{O}$.

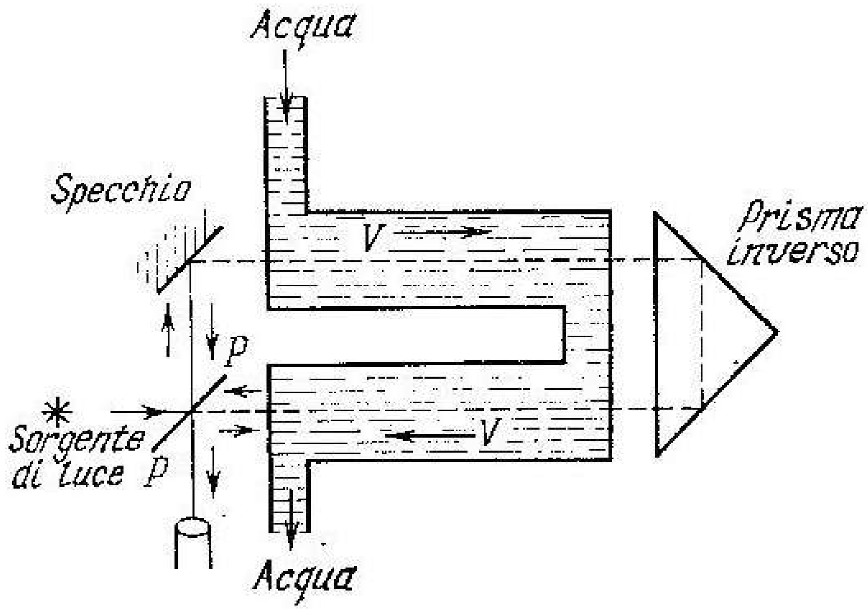

Fig. 3.7. Schizzo schematico dell'esperimento di Fizeau. Una lamina semitrasparente PP separa il raggio di luce proveniente dalla sorgente in due fasci di luce, uno lungo il flusso d'acqua e l'altro nel verso opposto. Fresnel, che studiava la propagazione della luce in un mezzo in movimento, supponeva che se la velocità della luce nell'acqua immobile fosse v' e quella della corrente d'acqua V, la velocità della luce v per l'osservatore, rispetto a cui l'acqua si muove, sarebbe $v = v' \pm kV$, dove il segno « $+$ » corrisponde alla propagazione della luce lungo la corrente dell'acqua, e il segno « $-$ » alla propagazione in senso inverso; k è chiamato coefficiente di trascinamento. Questo coefficiente fu cercato da Fizeau, che ha condotto l'esperimento descritto. È derivato da questo esperimento che $k = 1 - 1/n^2$. La teoria della relatività spiega naturalmente il risultato di Fizeau (vedi il testo). I dettagli dell'esperimento si possono trovare nei libri [13] e [15].

5

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia? (1905)

I risultati della precedente ricerca portano a una conclusione molto interessante, che ora intendo dedurre.

Avevo basato quella ricerca sulle equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto unite all'espressione maxwelliana per l'energia elettromagnetica dello spazio, nonché sul seguente principio:

Le leggi secondo cui cambiano gli stati dei sistemi fisici sono indipendenti dal fatto che questi cambiamenti siano riferiti all'uno o all'altro di due sistemi di coordinate che si muovano, l'uno rispetto all'altro, di moto traslatorio parallelo e uniforme (principio di relatività).

Fondandomi su questi princìpi[1] ho dedotto, tra l'altro, il seguente risultato (§ 8). Sia dato un sistema di onde di luce piane che, rispetto al sistema di coordinate (x, y, z), possieda l'energia l, e si supponga che la direzione del raggio (normale all'onda) formi un angolo φ con l'asse x del sistema. Introduciamo ora un nuovo sistema di coordinate (ξ, η, ζ) che, rispetto al sistema (x, y, z), si muova con traslazione parallela e uniforme, e la cui origine si muova con velocità v lungo l'asse x. Allora la quantità di luce in oggetto possiede un'energia che, misurata nel sistema (ξ, η, ζ), è data da

$$l^* = l\frac{1-\cos\varphi \cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

[1] Il principio della costanza della velocità della luce è ovviamente contenuto nelle equazioni di Maxwell.

dove c indica la velocità della luce. Questo risultato è alla base di quanto segue.

Abbiamo un corpo in quiete nel sistema (x, y, z), e la sua energia, riferita a questo sistema, è E_0. Indichiamo con H_0 la sua energia riferita al sistema (ξ, η, ζ) (che si muove, come si è detto, con la velocità v). Supponiamo che questo corpo emetta, lungo una direzione che forma un angolo φ con l'asse x, onde luminose piane di energia $L/2$ (misurata nel riferimento (x, y, z)), e nel contempo emetta una uguale quantità di luce nella direzione opposta. Il corpo, intanto, permanga in quiete rispetto a (x, y, z). Il principio di conservazione dell'energia deve essere applicabile al processo che stiamo esaminando, e deve esserlo (per il principio di relatività) con riferimento a entrambi i sistemi di coordinate. Indichiamo con E_1 e H_1 i valori dell'energia, misurata rispettivamente nei sistemi (x, y, z) e (ξ, η, ζ), dopo l'emissione della luce. Usando la relazione precedentemente data otteniamo

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L,$$

$$H_0 = H_1 + \frac{1}{2}L\,\frac{1-\cos\varphi \cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{1}{2}L\,\frac{1+\cos\varphi \cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Per sottrazione si ottiene

$$H_0 - E_0 - (H_1 - E_1) = L\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right).$$

Le due differenze $H-E$ che figurano in questa espressione hanno un semplice significato fisico: H e E sono valori dell'energia dello stesso corpo riferiti a due sistemi di coordinate in reciproco moto relativo, il corpo essendo in quiete in uno dei sistemi (sistema $(x, y, z,)$). È allora chiaro che $H-E$ differisce dall'energia cinetica K, riferita al sistema (ξ, η, ζ), solo per una costante additiva C, che dipende dalla scelta delle costanti arbitrarie di H ed E. Poiché C non varia durante l'emissione, possiamo porre

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C.$$

Se ne deduce che

$$K_0 - K_1 = L\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right).$$

L'energia cinetica del corpo rispetto a (ξ, η, ζ) diminuisce, come risultato dell'emissione della luce, e l'ammontare della diminuzione è indipendente dalle proprietà del corpo. E, inoltre, la differenza $K_0 - K_1$, come l'energia cinetica dell'elettrone (§ 10), dipende dalla velocità.

Trascurando quantità piccole del quarto ordine o di ordine superiore si ha

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}v^2.$$

Da questa equazione direttamente segue che *se un corpo emette un'energia L sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di L/c^2*. Il fatto che l'energia sottratta al corpo divenga energia di radiazione non è essenziale, e la conclusione che se ne trae è di portata più generale: la massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia; variando l'energia di una quantità L, la massa varia, nello stesso senso, di $L/9 \times 10^{20}$, se l'energia si misura in erg e la massa in grammi.

Non è da escludere che la teoria trovi conferma nel caso di corpi a contenuto energetico fortemente variabile, come i sali di radio. Se la teoria è conforme ai fatti, allora la radiazione trasporta inerzia tra corpi emittenti e corpi assorbenti.

EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA

(Da A. Pais, *Sottile è il Signore…* Bollati Boringhieri, p. 164)

7b. *Settembre 1905: sulla relazione* $E = mc^2$

"La massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia", scrisse, a conclusione della memoria del settembre 1905 [E9], Einstein, all'epoca tecnico di terza classe all'Ufficio brevetti di Berna. "Il principio di conservazione della massa è un caso particolare del principio di conservazione dell'energia", scrisse nel maggio 1906 [E10], quando era tecnico di seconda classe. "Quanto a inerzia, una massa m è equivalente a un contenuto di energia (...) mc^2. Questa conclusione è di importanza straordinaria, dato che [implica che] la massa inerziale e l'energia di un sistema fisico appaiono equivalenti", affermò nel 1907 [E11]. L'equivalenza di massa ed energia in casi particolari era nota da circa venticinque anni (7e);[15] la novità del 1905 fu l'aver generalizzato questa connessione.

La dimostrazione data da Einstein nel 1905[16] della relazione

$$E = mc^2 \tag{7.20}$$

si articolava come segue. Si consideri un corpo con energia E_i, in quiete in un dato riferimento inerziale. Il corpo poi emetta onde luminose piane con energia $L/2$ in una direzione formante un angolo ϕ con l'asse x, e un'eguale quantità di luce nella direzione opposta. Dopo queste emissioni, il corpo ha un'energia finale E_f tale che $\Delta E = E_i - E_f = L$. Si consideri questa stessa situazione vista da un riferimento inerziale in moto con velocità v in direzione x. In base all'equazione (7.18), $\Delta E' = E_i' - E_f' = \gamma L$ indipendentemente da ϕ. Quindi

$$\Delta E' - \Delta E = L(\gamma - 1) \tag{7.21}$$

ovvero, nell'approssimazione del second'ordine,

$$\Delta E' - \Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{c^2}\right) v^2. \tag{7.22}$$

Ora, disse Einstein, che l'espressione (7.21) della variazione di energia ha la stessa struttura della (7.17), che dà l'energia cinetica aggiuntiva di una particella, talché "se un corpo emette l'energia L sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di L/c^2: il fatto che l'energia sottratta al corpo diventi energia di radiazione non fa, evidentemente, alcuna differenza".

Questo breve articolo del settembre 1905 terminava con l'osservazione che i corpi "il cui contenuto di energia è variabile in grado elevato, per esempio i sali di radio" avrebbero forse potuto essere utilizzati per con-

L'espressione 7.17 è $W = \int K'\,dx' = m\int_0^v \gamma^3 v\,dv = mc^2(\gamma - 1)$.

DEDUZIONE DELLA FORMULA E = mc^2 SECONDO IL PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

Secondo il principio di minima azione per un sistema meccanico esiste un integrale *S*, detto azione, che è minimo per il moto effettivo. Esso deve essere invariante per le trasformazioni di Lorentz, deve quindi essere l'integrale di uno scalare e sotto il segno d'integrazione devono comparire solo differenziali del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è l'intervallo ds o αds, dove α è una costante. L'azione sarà data dall'integrale

$S = -\alpha \int_a^b ds$ esteso alla linea d'universo compresa fra i due eventi *a* e *b* che rappresentano le posizioni iniziale e finale occupate dalla particella negli istanti t_1 e t_2, vale a dire tra i punti d'universo dati. La costante α deve essere una grandezza positiva per tutte le particelle (ci troviamo in uno spazio quadridimensionale di Minkowski, nel quale l'integrale $\int_a^b ds$ ha un valore massimo quando è esteso ad una retta di universo e può quindi essere reso arbitrariamente piccolo se esteso ad una curva di universo; così l'integrale preceduto dal segno positivo – se α fosse negativo – non avrebbe un minimo).

L'azione si può rappresentare sotto forma di integrale del tempo: $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, in cui *L* è la funzione di Lagrange o lagrangiana del sistema meccanico. Dalla relazione $ds = c\,dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ricaviamo $S = \int_{t_1}^{t_2} -\alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$. La lagrangiana per la particella è quindi $L = -\alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. La grandezza α caratterizza la particella data; in meccanica classica ogni particella è caratterizzata dalla sua massa *m* e nel passaggio al limite per $c \to \infty$, *L* si deve trasformare nell'espressine classica dell'energia cinetica $L = \frac{mv^2}{2}$. Sviluppando allora *L* in serie di potenze di $\frac{v}{c}$, trascurando nello sviluppo i termini superiori al secondo ordine, otteniamo $L = -\alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$. I termini costanti della lagrangiana non incidono sulle equazioni del moto e si possono omettere. Omettendo la costante αc in *L* e confrontando con l'espressione classica si trova $\alpha = mc$. L'azione per una particella libera è quindi $S = -mc \int_a^b ds$ e la lagrangiana $L = -mc^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

La quantità di moto di una particella è il vettore $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

L'energia *E* della particella è la grandezza **pv** – *L*. Dopo una semplice sostituzione si ottiene $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Dalla formula si vede che, in meccanica relativistica, l'energia di una particella libera non si annulla per $v = 0$, ma prende il valore

$E_0 = mc^2$.

DEDUZIONE DELLA FORMULA E=mc^2 PARTENDO DALLA QUANTITÀ DI MOTO (IMPULSO)

La legge di Newton $F = \frac{dp}{dt}$, dove p è l'impulso o quantità di moto e t il tempo.
L'impulso relativistico è dato da $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m v$.

Al limite (per c infinita) F deve ridursi alla sua espressione classica: $F = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$;derivando la velocità rispetto al tempo otteniamo, dopo alcuni semplici passaggi:
$F = m\frac{\frac{dv}{dt}}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}$. L'integrale della forza per accelerare la particella di massa m dalla velocità 0 fino a v è uguale all'energia cinetica K acquisita dalla particella
$K = m\int_0^v \frac{v}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}dv = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ - $mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2$. Se $v = 0$, $\gamma = 1$ e $K = 0$, quindi l'energia totale deve valere $E = mc^2$ che è l'energia della particella a riposo.

DEDUZIONE DELLA FORMULA $E=mc^2$

(*Utilizzando la funzione di Lagrange calcolata in precedenza mediante il metodo variazionale*)

Le lettere $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{v}$, in grassetto, rappresentano grandezze vettoriali; v^2 è invece, ovviamente, uno scalare.

La lagrangiana in meccanica relativistica è $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; la quantità di moto o impulso è il vettore

$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ le cui componenti sono le derivate di L rispetto alle componenti di $\boldsymbol{v}$.

Eseguendo la derivazione, otteniamo $\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

L'energia E di un sistema meccanico è data dalla formula

$E = \boldsymbol{pv} - L$: sostituendo i valori trovati otteniamo $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Quando la velocità si annulla l'energia avrà il valore $E_0 = mc^2$ che rappresenta l'energia a riposo.

2.3.3 *La convenzionalità della simultaneità*

Malgrado la critica alla concezione del "presente cosmico" sia una diretta conseguenza della relatività della simultaneità, la sua portata concettuale e scientifica è stata spesso sottovalutata. Onde evitare l'impressione che essa sia solo frutto di una particolare interpretazione della teoria, conviene approfondire il problema dei fondamenti filosofici della nozione di simultaneità relativistica. In effetti, la critica di Einstein alla simultaneità assoluta era partita proprio dall'impossibilità in linea di principio di verificare la contemporaneità di eventi a distanza, e quindi da un posizione filosofica sostanzialmente *verificazionista*. Il verificazionismo sostiene che una proposizione qualsiasi è dotata di senso se e solo se è possibile indicare in linea di principio un metodo per verificarla. Esso adotta quindi un criterio di verità che è essenzialmente *epistemico*: la verità di una proposizione non trascende i mezzi cognitivi di cui disponiamo per asserirla. Per esempio, secondo un verificazionista non possiamo attribuire un valore di verità né a una proposizione matematica di cui non abbiamo una dimostrazione, né a una proposizione empirica per cui non c'è sufficiente evidenza. La posizione opposta, quella cioè per cui una proposizione è vera o falsa indipendentemente dalle nostre capacità di stabilire quale dei due valori di verità le appartenga, è in genere denominata *realismo*. Una strategia verificazionista è all'origine sia della critica allo spazio assoluto newtoniano inteso come portatore di proprietà meccaniche, che all'origine della critica al "presente assoluto cosmico". Postulare uno spazio assoluto e un presente cosmico assoluto non contraddice direttamente la teoria della relatività speciale. Non avendo alcuna conseguenza empirica osservabile, le due entità postulate non hanno però alcun significato fisico e sono dunque del tutto superflue.

La critica concettuale di Einstein, che all'epoca della formulazione della relatività ristretta era sotto l'influenza delle filosofie di David Hume e Ernst Mach, presupponeva dunque un punto di vista verificazionista: la verifica diretta della simultaneità tra due eventi può darsi solo quando gli eventi sono spazialmente quasi coincidenti. Di conseguenza, da parte di coloro che, come i neopositivisti, dividono la conoscenza scientifica in una componente empirica o dipendente dal mondo e in una definitoria o dipendente dal nostro modo di guardare a esso,[14] si è spesso affermato che la determinazione temporale di eventi a distanza è frutto di una *convenzione*, ovvero di una definizione svuotata di ogni contenuto fattuale. La natura convenzionale della coordinatizzazione temporale di eventi a distanza sembrerebbe portare un ulteriore argomento a favore della concezione secondo cui la simultaneità di eventi a distanza non ha alcun carattere oggettivo.

Il termine 'ulteriore' va sottolineato: la controversa tesi filosofica della *convenzionalità* della simultaneità, sostenuta da Reichenbach, Grünbaum e vari altri autori, va in ogni caso tenuta distinta da quella, universalmente condivisa, della *relatività* della simultaneità. Mentre la tesi della convenzionalità della simultaneità riguarda, come ora vedremo, la scelta di una particolare relazione di simultaneità all'interno di un unico sistema di riferimento inerziale assunto come già dato, il problema della relatività della simultaneità riguarda invece la tesi sopra riferita secondo cui l'asserzione 'l'evento *a* è simultaneo con *b*' è a rigore priva di senso se gli eventi non sono quasi coincidenti spazialmente e perciò passibili di una unica percezione diretta che li comprenda entrambi. Se gli eventi sono separati da un intervallo di tipo *spazio*, nello spaziotempo di Minkowski l'asserzione di cui sopra acquista un valore di verità definito solo se essa è riferita a un particolare sistema inerziale, motivo per cui la tesi della relatività della simultaneità assume significato solo tra *diversi* sistemi inerziali. Naturalmente, data l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento, si può anche definire in modo non controverso come convenzionale (o sottodeterminata dai fatti) la scelta di un particolare sistema di riferimento con il quale descrivere i processi fisici. Ciò che bisogna comunque tenere concettualmente distinto è il problema di scegliere un particolare sistema inerziale rispetto al quale relativizzare la simultaneità dal supposto problema *di scegliere una particolare relazione di simultaneità all'interno di un singolo sistema inerziale già dato.* In che senso in relatività siamo di fronte a tale secondo problema?

Considerando che in fisica ogni asserzione concernente la durata temporale di un fenomeno è in realtà corrispondente a una lettura di orologi, il problema da cui partì Einstein nel 1905 era quello di trovare un metodo per sincronizzare due orologi ideali supposti identici e posti in due punti spazialmente distanti di uno *stesso* sistema inerziale. Il problema è simile a quello che possiamo incontrare quando vogliamo festeggiare il Capodanno insieme con amici lontani, e per sincronizzare il momento in cui stappare lo spumante facciamo una chiamata telefonica o utilizziamo il segnale orario televisivo. Il metodo originalmente suggerito da Einstein consisteva nell'inviare un segnale luminoso da una linea di universo iner-

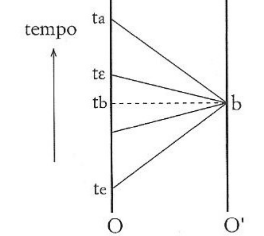

fig. 9 - $t_\varepsilon = t_e + \varepsilon (t_a - t_e)$ con $0 < \varepsilon < 1$

[14] Tale distinzione riecheggia quella invocata da Kant tra elementi a priori ed elementi a posteriori della conoscenza umana. L'influsso di Kant sul primo neopositivismo è stato documentato da vari storici, tra cui Julius Weinberg e Michael Friedman.

ziale O, rappresentante il primo orologio, a un'altra linea di universo inerziale O' corrispondente al secondo orologio, e poi far riflettere il segnale da quest'ultimo indietro verso il primo (cfr. fig. 9).

Data la finitezza della velocità della luce, un osservatore solidale all'orologio sulla linea di universo O potrà solo calcolare il tempo totale di andata e ritorno impiegato dalla luce dall'istante di emissione t_e a quello di assorbimento t_a. Naturalmente, tale tempo su O sarà uguale alla differenza $t_a - t_e$. Il problema della sincronizzazione a distanza è dato dal fatto che, non essendoci trasmissione istantanea di segnali, l'osservatore O in linea di principio non può sapere quale istante t_ε successivo a t_e corrisponde sulla sua linea di universo alla riflessione b avvenuta lungo O'. In linea di principio, tutti gli eventi lungo O che sono compresi nell'intervallo aperto tra t_e e t_a,[15] e che sono separati da un intervallo di tipo spazio rispetto a b, potrebbero essere simultanei con b, dato che nessun segnale causale può viaggiare più rapidamente della luce. Poiché l'osservatore lungo O può solo calcolare i tempi di andata e ritorno della velocità della luce, nulla vieta che essa abbia una velocità diversa nei due tratti, in quanto, secondo vari studiosi, nessun esperimento potrebbe smentire tale ipotesi di anisotropia nella propagazione. Per esempio, la luce potrebbe avere una velocità quasi istantanea nel tratto da O a O', e rallentare rispetto alla velocità media nel percorso inverso da O' a O, in modo tale da dare, alla fine, un tempo totale di andata e ritorno uguale a $t_a - t_e$. In tal caso, l'evento t_ε simultaneo con la riflessione b sarebbe "subito dopo" l'emissione t_e, mentre nell'ipotesi inversa, esso risulterebbe assai vicino temporalmente all'istante di assorbimento t_a. Naturalmente, l'evento b si sposterebbe lungo O' in modo corrispondente.

Risulta quindi opportuno esprimere questa possibile anisotropia scegliendo una variabile t_ε che possa assumere come valore ogni numero reale tra zero e uno, esclusi gli estremi. Allora la risposta più generale al problema di determinare l'istante t_ε su O che è simultaneo alla riflessione b su O' è di assumere che $t_\varepsilon = t_e + \varepsilon(t_a - t_e)$. (Si noti che se ε fosse uguale a 0, avremmo che $t_\varepsilon = t_e$, mentre per $\varepsilon = 1$ avremmo $t_\varepsilon = t_a$, e questi due casi sono da escludere perché sarebbero compatibili solo con l'ipotesi di una trasmissione istantanea della luce nell'una o nell'altra direzione. È per questo che si sceglie l'intervallo aperto $0 < \varepsilon < 1$).

L'argomento principale in favore della convenzionalità della simultaneità consiste essenzialmente nell'affermare che la scelta di una particolare relazione di simultaneità (ovvero di uno tra l'infinità più che numerabile di

[15] Nel caso dei numeri reali, un intervallo si dice 'aperto' quando non comprende gli estremi.

** Argomento di Reichenbach del circolo vizioso

valori che ε può assumere) non è vincolata da alcun dato empirico. Tale difficoltà fu risolta da Einstein con una stipulazione che corrisponde a porre $\varepsilon = 1/2$ (ossia, tale che $t_\varepsilon = t_b$), la cosiddetta relazione *standard* di simultaneità, il che a sua volta corrisponde all'ipotesi fisica, *che secondo i convenzionalisti è in linea di principio non-verificabile*, che nel viaggio di andata e in quello di ritorno la luce impieghi lo stesso tempo a percorrere la distanza data (isotropia della velocità del luce, ovvero sua uguaglianza in tutte le direzioni). Malgrado la questione sia ancora aperta, ci sembra che a tutt'oggi non esistano argomenti decisivi che ci permettano di attaccare la tesi della convenzionalità della simultaneità sulla base della possibilità di misurare la velocità della luce "solo andata" (*one-way velocity of light*) (sull'isotropia della velocità della luce, cfr. Clifton, 1989).

A questo proposito, ricordiamo che un teorico causale del tempo quale Reichenbach ha giustificato la convenzionalità della scelta *standard* non solo per la sua maggiore semplicità, ma anche con un argomento di tipo "circolo vizioso". Per stabilire che t_b è davvero fattualmente e oggettivamente simultaneo con b, dovremmo poter verificare l'isotropia della velocità della luce, dovremmo cioè poter misurare la velocità della luce in una sola direzione (solo andata), supponendo nota la distanza tra O e O'. Dato che però il calcolo di una velocità presuppone la determinazione del tempo e dunque l'avere sincronizzato gli orologi a distanza, ci ritroviamo nella situazione di partenza, dato che per sincronizzare dovremmo sapere quali eventi sono simultanei. In una parola, per determinare la simultaneità dobbiamo presupporre l'isotropia della velocità della luce, ma per determinare quest'ultima dobbiamo assumere la simultaneità, e il circolo vizioso si chiude.

Sottolineiamo il carattere *epistemico* di questo argomento, ossia il suo fondarsi su una tesi di significanza delle proposizioni di tipo neopositivista. Basandosi sul principio di verificabilità, tale argomento si applica anche a tentativi di definire la simultaneità con il metodo alternativo del cosiddetto *trasporto lento* di orologi, inizialmente coincidenti e dunque sincronizzabili. Per spiegare tale metodo, ricordiamo che il tempo proprio misurato da un orologio lungo una linea di universo inerziale, pure essendo intrinseco[16] allo spaziotempo, dipende strettamente dal percorso e dunque dalla velocità. Abbiamo infatti già visto, e ne discuteremo ancora nel prossimo paragrafo, che come effetto delle trasformazioni di Lorentz, il tempo dei sistemi in moto risulta "dilatato" se misurato dall'osservatore in quiete e quindi scorre più lentamente. Per ovviare a questa limitazione, si è tentato di argomentare che un trasporto con velocità molto piccole (al limite infinitesime) di un orologio dal punto di emissione al punto di ri-

[16] "Intrinseco" significa qui "indipendente da sistemi di coordinate".

flessione b su O' ridurrebbe a zero l'effetto di rallentamento dell'orologio in viaggio verso O' rispetto a quello in quiete che scandisce il tempo lungo O. Reichenbach argomenta però che se anche fosse possibile la sincronizzazione attraverso tale metodo, essa fornirebbe solo una *definizione alternativa* di simultaneità: persino supponendo che nel momento in cui il secondo orologio viene riportato su O si potesse verificare che esso è in accordo col primo, non potremmo mai essere sicuri che durante il trasporto il comportamento del secondo orologio non sia mutato.

Più che su un argomento epistemico, per difendere la tesi della convenzionalità della simultaneità Grünbaum insiste invece su una teoria *relazionista* del tempo, ripresa anch'essa da Reichenbach. Come abbiamo già anticipato, secondo questa tesi 'il tempo non è assoluto' in un senso diverso da quello visto prima. Prima, assoluto si contrapponeva a 'dipendente da un sistema di riferimento'. Qui 'tempo non assoluto' significa che (a differenza di come pensava Newton) *esso non sussiste indipendentemente dagli oggetti ed eventi fisici*. Per Newton, se tutti gli oggetti dell'universo fisico si annichilissero, il tempo continuerebbe a esistere e a scorrere. Per un relazionista invece, una relazione temporale non può esistere tra istanti di tempo ma solo tra eventi fisici, e va considerata come non convenzionale se e solo se essa è definibile in base a relazioni fisiche tra gli eventi. Poiché ogni evento tra t_e e t_a è, come dice Grünbaum, "topologicamente simultaneo" con b, ossia causalmente non-connettibile con esso, e la relazione di simultaneità standard $\varepsilon = 1/2$ non è definibile in base ad alcuna relazione fisica, compresa la non-connettibilità causale, Grünbaum conclude a favore della convenzionalità della simultaneità.

Sebbene molta letteratura sul convenzionalismo della simultaneità abbia tentato di criticare questo argomento ricorrendo al linguaggio estrinseco dei sistemi di riferimento e dei raggi di luce, l'attacco più veemente a questa tesi è venuto nel 1977 da David Malament, in base a un argomento che fa riferimento solo a elementi intrinseci della struttura dello spaziotempo di Minkowski, cioè indipendenti da sistemi di riferimento. Malament parte dall'assunto fondamentale della teoria causale del tempo, secondo cui una relazione temporale è oggettiva (non convenzionale) se e solo se è definibile in base a relazioni causali, e poi dimostra che la relazione standard di simultaneità è l'unica relazione di equivalenza non banale che è definibile in base alla relazione di connettibilità causale e a una linea di universo inerziale O (cfr. Malament, 1977).[17] Come si può

[17] Ricordiamo che una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva. Una relazione è non banale se vale almeno per due punti distinti senza essere la relazione universale, cioè la relazione che vale per ogni coppia di punti dello spaziotempo.

vedere dalla figura 9, in cui per $\varepsilon = 1/2$ la linea che congiunge b a t_b è ortogonale a O, la relazione *standard* è essenzialmente data dall'ortogonalità rispetto a O, dato che per $\varepsilon \neq 1/2$, l'ortogonalità non è preservata.

È interessante solo accennare a come Malament arrivi alla sua dimostrazione, dato che la tecnica da lui impiegata mostra che le proprietà oggettive dello spaziotempo di Minkowski – in questo caso la relazione di simultaneità standard, che in base al teorema risulta ovviamente *relativa* a O ma *non convenzionale* data la sua unicità – sono proprio quelle che rimangono invarianti per trasformazioni dello spaziotempo in se stesso che preservino la struttura causale. Da un punto di vista geometrico, tali trasformazioni, dette anche *automorfismi causali*, sono *rotazioni* spaziali attorno alla linea inerziale O (isotropia dello spazio), *traslazioni* lungo O (omogeneità del tempo), *riflessioni* rispetto a superfici di simultaneità (simmetria temporale), *cambiamenti di scala* (dilatazioni) e trasformazioni di Lorentz. Più semplicemente, gli automorfismi causali sono funzioni da R^4 a R^4 che lasciano invariata la struttura del cono di luce, ovvero che trasformano un vettore di tipo luce in uno di tipo luce, uno di tipo tempo in uno di tipo tempo, e uno di tipo spazio in uno di tipo spazio. Il nocciolo della prova di Malament è che tali automorfismi causali sono anche simmetrie della relazione di simultaneità che essi definiscono, tanto da individuarla in modo unico come la relazione che prescrive come simultanei tutti gli eventi appartenenti al piano ortogonale che passa per O, escludendo invece ogni relazione data da $\varepsilon \neq 1/2$. Questo risultato mostra che, da un punto di vista intrinseco, la relazione di simultaneità *standard* è davvero parte integrante della struttura dello spaziotempo di Minkowski, assai più di quanto le considerazioni estrinseche facenti riferimento alla velocità della luce potevano far supporre.[18]

È stato però obiettato che tale risultato di Malament non è solo "sensibile" alle condizioni definitorie, ma presuppone anche un impegno filosofico realista nei confronti dell'esistenza dello spaziotempo e delle sue proprietà metriche.[19] Per quanto riguarda la prima difficoltà, aggiungendo una linea di universo inerziale O' a quella data O, oppure un'orientazione temporale alla struttura dello spaziotempo, il risultato di definibilità unica di $\varepsilon = 1/2$ viene compromesso (si veda Norton, 1992). Per

[18] Infatti, fare a meno della relazione di simultaneità *standard* significa fare a meno di tutta la struttura che preserva gli angoli di due qualsiasi vettori, detta anche struttura conforme dello spaziotempo.

[19] In conversazione privata con uno degli autori (M.D.), A. Grünbaum ha anche obiettato che una debolezza del teorema di Malament consiste nell'*assumere*, piuttosto che nel *dimostrare*, che la relazione di simultaneità sia una relazione di equivalenza. Di contro a tale assunzione, si noti che la relazione di non-connettibilità causale, i cui candidati sono eventi separati da intervalli di tipo spazio proprio come i candidati della relazione di simultaneità, è non-transitiva e dunque non è di equivalenza.

quanto riguarda la seconda obiezione, più filosofica, il risultato di Malament potrebbe lasciare sostanzialmente tiepidi dei filosofi relazionisti come Reichenbach, dato che costoro ritengono che lo spaziotempo sia solo un utile modello matematico e non una entità sostanziale parte dell'universo fisico. I punti dello spaziotempo per un relazionista non esistono, dato che, come abbiamo visto, le relazioni spaziotemporali sono da lui costruite a partire da eventi o oggetti fisici attualmente esistenti, e non sussistono indipendentemente da essi. Seguendo Quine, si può di nuovo invocare il principio per cui non c'è esistenza di enti senza loro identità, e ne seguirebbe allora che i punti spaziotemporali non esistono, perché nessuna delle loro postulate proprietà geometriche è essenziale, o ne permette l'identificazione. Senza addentrarci nella discussione di questa obiezione "anti-sostanzialista" dello spaziotempo, l'abbiamo però accennata per mostrare (1) che il problema della convenzionalità della simultaneità è un'area di ricerca fisico-filosofica ancora oggi attiva; (2) che un risultato fisico tecnico-formale ha precisi presupposti filosofici; (3) che un nuovo risultato tecnico difficilmente risolve una volta per tutte una problematica filosofica, ma certamente la rende più complessa e sofisticata.[20] L'interpretazione del risultato tecnico di Malament, e dunque anche la disputa sulla convenzionalità della simultaneità, dipende in parte da complicati argomenti sulla natura sostanziale dello spaziotempo, su cui ritorneremo nel paragrafo 3.11 su "Fisica e Geometria".

che interazione si propaghi piú velocemente della luce. Come abbiamo appena visto, i concetti di « prima » e « dopo » hanno un senso assoluto solo per questi eventi; questa è una condizione indispensabile perché i concetti di causa e di effetto abbiano senso.

§ 3. *Tempo proprio*

Supponiamo di osservare da un sistema di riferimento inerziale un orologio animato da un moto arbitrario rispetto a noi. In ogni istante questo moto può essere considerato uniforme. Possiamo quindi in ogni istante fissare rigidamente all'orologio un sistema di coordinate che sarà (con l'orologio) un sistema di riferimento inerziale.

In un intervallo di tempo infinitesimo dt (secondo un orologio fisso che si trova cioè nel nostro sistema di riferimento) l'orologio in movimento percorre la distanza

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Si domanda: quale sarà l'intervallo di tempo dt' indicato dall'orologio in moto? Nel sistema di coordinate legato all'orologio in movimento quest'ultimo è fermo, cioè $dx'=dy'=dz'=0$. In virtú dell'invarianza dell'intervallo,

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2,$$

donde

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Ma

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

dove v è la velocità dell'orologio in moto; perciò

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2}}. \tag{3,1}$$

L'integrazione di questa espressione dà l'intervallo di tempo indicato dall'orologio in movimento, quando l'orologio fisso indicherà il tempo t_2-t_1:

$$t_2'-t_1'=\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Il tempo indicato da un orologio, solidale con un corpo dato, è detto *tempo proprio* di questo corpo. Le formule (3,1) e (3,2) esprimono il tempo proprio in funzione del tempo misurato nel sistema di riferimento rispetto al quale si considera il moto.

Come risulta dalle formule (3,1) e (3,2), il tempo proprio di un corpo in moto è sempre minore del corrispondente intervallo di tempo nel sistema fisso. In altri termini, un orologio in moto va piú lentamente di un orologio fisso.

Supponiamo ora di avere un altro orologio in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale K. Il sistema K' solidale con il secondo orologio è anch'esso inerziale. Allora, l'orologio del sistema K', dal punto di vista di un osservatore nel sistema K, ritarda rispetto all'orologio dell'osservatore. E al contrario, dal punto di vista del sistema K', ritarda l'orologio nel sistema K. Per convincerci che non esiste alcuna contraddizione, consideriamo il seguente fatto. Per costatare che l'orologio di K' ritarda su quello di K, procediamo nel modo seguente. Supponiamo che in un certo istante l'orologio di K' incontri quello di K e che in questo istante essi indichino lo stesso tempo. Per confrontare l'andatura degli orologi di K e di K', bisogna nuovamente confrontare le indicazioni dell'orologio di K' con un secondo orologio di K, ossia con quello incontrato dall'orologio di K' in un altro istante. Si scopre cosí che l'orologio di K' ritarda sull'orologio di K con quale viene confrontato. Per poter confrontare l'andatura degli orologi in due sistemi di riferimento, occorrono quindi piú orologi in un sistema e un orologio in un altro sistema.

Risulta perciò che questo processo non è simmetrico rispetto ai due sistemi considerati. In ritardo sarà sempre l'orologio che viene confrontato con differenti orologi dell'altro sistema di riferimento.

Se si prendono due orologi uno dei quali descrive una traiettoria chiusa per tornare alla posizione iniziale (dove si trova l'orologio fisso), risulterà in ritardo proprio l'orologio in moto (rispetto a quello rimasto fisso). Il ragionamento inverso, nel quale i ruoli degli orologi vengono invertiti, non è valido perché l'orologio descrivente la traiettoria chiusa non compie un moto rettilineo e uniforme, e il sistema di riferimento relativo ad esso non è inerziale.

Siccome le leggi della natura sono identiche soltanto in sistemi di riferimento inerziali, i sistemi di riferimento relativi all'orologio fisso (sistema inerziale) e a quello in moto (sistema non inerziale) possiedono proprietà differenti, e il ragionamento secondo il quale l'orologio fisso dovrebbe ritardare è sbagliato.

L'intervallo di tempo indicato da un orologio è uguale all'integrale $\frac{1}{c}\int ds$ preso lungo la linea d'universo di questo orologio. Se l'orologio è fisso, la sua linea d'universo è una retta parallela all'asse del tempo; se invece l'orologio compie un moto non uniforme lungo una traiettoria chiusa e ritorna alla posizione di partenza, la sua linea d'universo è una curva passante per due punti sulla retta d'universo di un orologio fisso, corrispondenti all'inizio ed alla fine del moto. D'altra parte, abbiamo visto che il tempo indicato da un orologio in quiete è sempre maggiore di quello di un orologio in moto. Si arriva quindi alla conclusione che l'integrale $\int ds$ preso tra due punti d'universo dati ha un valore massimo quando è esteso alla retta d'universo che congiunge questi due punti[1]).

§ 4. *Trasformazione di Lorentz*

Ci proponiamo ora di trovare le formule di trasformazione da un sistema di riferimento inerziale in un altro, cioè le formule che permettono, conoscendo le coordinate x, y, z, t di un evento in un sistema di riferimento K, di trovare le coordinate x', y', z', t' dello stesso evento in un altro sistema inerziale K'.

Questo problema in meccanica classica si risolve molto facilmente. Essendo il tempo assoluto, abbiamo $t = t'$; scegliendo poi le coordinate nel modo solito (facendo cioè coincidere gli assi x ed x', mentre gli assi y, z restano paralleli a y', z' e il moto avviene lungo gli assi x ed x'), le coordinate y e z saranno evidentemente uguali alle coordinate y' e z', mentre le coordinate x ed x' differiranno per la distanza percorsa da un sistema rispetto all'altro; se come origine del tempo si prende l'istante in cui i due sistemi delle coordinate coincidono e se si indica con V la velocità di K' rispetto a K, questa distanza sarà allora Vt. Quindi si ha:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{4,1}$$

Queste sono le formule di *trasformazione di Galilei*. È facile verificare che questa trasformazione, come c'era da aspettarsi, non soddisfa la condizione della teoria della relatività: essa non lascia invariante l'intervallo tra due eventi.

Per cercare le formule di trasformazione relativistiche, partiremo dal requisito che esse lascino invarianti gli intervalli.

Come abbiamo visto nel § 2, l'intervallo tra due eventi si può considerare come la distanza tra i due punti d'universo corrispondenti in un sistema di coordinate quadridimensionale. Possiamo dunque affermare che la trasformazione cercata deve lasciare inalterate tutte le lunghezze nello spazio quadridimensionale x, y, z, ct. Tali trasformazioni non possono essere che traslazioni e rotazioni del sistema di coordinate. Le traslazioni del sistema di coordinate non presentano

[1]) Si suppone naturalmente che questi punti e le linee che li congiungono siano tali che tutti gli elementi ds su queste linee sono del genere tempo.

Questa proprietà dell'integrale è dovuta al carattere non euclideo della geometria quadridimensionale. In uno spazio euclideo questo integrale sarebbe minimo lungo una retta.

alcun interesse perché si riducono ad un semplice spostamento dell'origine delle coordinate spaziali e ad un cambiamento dell'origine dei tempi. Quindi la trasformazione cercata dev'essere espressa matematicamente come rotazione di un sistema di coordinate quadridimensionale x, y, z, t.

Ogni rotazione in uno spazio quadridimensionale può essere scomposta in sei rotazioni rispettivamente nei piani xy, zy, xz, tx, ty, tz (analogamente una rotazione nello spazio ordinario può essere scomposta in tre rotazioni nei piani xy, zy ed xz). Le tre prime rotazioni trasformano solo le coordinate spaziali; esse corrispondono quindi alle rotazioni ordinarie nello spazio euclideo.

Consideriamo una trasformazione nel piano tx; le coordinate y e z restano invariate. In particolare, questa trasformazione deve lasciare invariata la differenza $(ct)^2 - x^2$, ossia il quadrato della « distanza » del punto (ct, x) dall'origine delle coordinate. La relazione tra le vecchie e le nuove coordinate in questa trasformazione è data dalle formule

$$x = x' \operatorname{ch}\psi + ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = x' \operatorname{sh}\psi + ct' \operatorname{ch}\psi, \tag{4,2}$$

dove ψ è l'« angolo di rotazione »; è semplice verificare l'uguaglianza $c^2t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Le formule (4,2) si differenziano dalle formule ordinarie di trasformazione nella rotazione degli assi coordinati per la sostituzione delle funzioni trigonometriche con quelle iperboliche. In questo si manifesta la differenza della geometria non euclidea dalla geometria euclidea. Le formule che cerchiamo sono le formule di trasformazione che permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale K ad un sistema K' che si muove rispetto a K lungo l'asse x con velocità V. In questo caso è evidente che sono soggetti alla trasformazione soltanto la coordinata x ed il tempo t. Questa trasformazione deve avere la forma (4,2). Resta da determinare l'angolo ψ che può dipendere solo dalla velocità relativa V[1]).

Consideriamo il moto dell'origine delle coordinate di K' nel sistema K. Allora $x' = 0$, e le formule (4,2) si scrivono

$$x = ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch}\psi,$$

o, dividendo membro a membro,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\psi.$$

dove x/t è evidentemente la velocità del sistema K' rispetto a K. Si ha quindi

$$\operatorname{th}\psi = \frac{V}{c},$$

[1]) Per evitare confusione, indicheremo ovunque con V la velocità relativa costante tra due sistemi inerziali e con v la velocità di una particella in moto, che non è necessariamente costante.

$$sh\psi = \frac{th\psi}{\sqrt{1-th^2\psi}} \; ; \; ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1-th^2\psi}}$$

da cui

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Sostituendo queste ultime espressioni nella (4,2), troviamo:

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4,3}$$

Queste sono le formule di trasformazione cercate, che sono chiamate formule di *trasformazione di Lorentz*. Queste formule saranno in seguito di importanza fondamentale.

Le formule inverse, esprimenti x', y', z', t' mediante x, y, z, t, si possono ottenere semplicemente operando la sostituzione di V con $-V$ (poiché in questo caso il sistema K si muove relativamente a K' con velocità $-V$). Le stesse formule si possono ottenere direttamente risolvendo le equazioni (4,3) rispetto ad x', y', z', t'.

Dalla (4,3) è facile vedere che, quando si passa alla meccanica classica per $c \to \infty$, le formule di trasformazione di Lorentz si riducono effettivamente alla trasformazione di Galilei.

Se nelle formule (4,3) $V > c$, le coordinate x, t diventano immaginarie; questo corrisponde all'impossibilità di un moto con velocità superiore a quella della luce. Non è nemmeno possibile avere un sistema di riferimento che si muova ad una velocità uguale a quella della luce perché i denominatori delle formule (4,3) si annullerebbero.

Per velocità V, piccole rispetto alla velocità della luce, in luogo delle (4,3) si possono utilizzare le formule approssimate

$$x = x'+Vt', \quad y=y', \quad z=z', \quad t=t'+\frac{V}{c^2}x'. \tag{4,4}$$

Consideriamo ora un'asta in quiete nel sistema K e disposta parallelamente all'asse x. Sia $\Delta x = x_2 - x_1$ (dove x_2 ed x_1 sono le coordinate delle estremità dell'asta nel sistema K) la sua lunghezza misurata in questo sistema. Cerchiamo ora la sua lunghezza nel sistema K'. A tale scopo bisogna trovare le coordinate delle due estremità (x'_2 ed x'_1) in questo sistema allo stesso istante t'. Dalle (4,3) abbiamo:

$$x_1 = \frac{x'_1+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

La lunghezza dell'asta nel sistema K' è $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e si ottiene sottraendo x_2 da x_1:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Si chiama *lunghezza propria* di un'asta la sua lunghezza nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. Indicando con $l_0 = \Delta x$ la lunghezza propria e con l la lunghezza della stessa asta misurata nel sistema K', otteniamo la relazione:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Da questa formula è chiaro che la lunghezza dell'asta è maggiore nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. La sua lunghezza, in un sistema in cui si muove con la velocità V, diminuisce nel rapporto di $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Questo risultato della teoria della relatività si chiama *contrazione di Lorentz*.

Poiché le dimensioni trasversali di un corpo in moto non cambiano, il suo volume $\mathscr{V}$ si riduce allo stesso modo:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

dove $\mathscr{V}_0$ è il *volume proprio* del corpo.

Le trasformazioni di Lorentz ci permettono di trovare i già noti risultati, relativi al tempo proprio (§ 3). Consideriamo un orologio in quiete nel sistema K'. Siano dati due eventi che accadono in uno stesso punto x', y', z' dello spazio nel sistema K'. Il tempo che separa questi eventi nel sistema K' è $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Cerchiamo ora il tempo Δt che separa gli stessi eventi nel sistema K. Dalle (4,3) abbiamo:

$$t_1 = \frac{t'_1+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

o, sottraendo l'uno dall'altro,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

che è in pieno accordo con la (3,1).

Notiamo infine ancora una proprietà delle trasformazioni di Lorentz, che le distingue dalle trasformazioni di Galilei. Quest'ultime possiedono, come si dice, la proprietà commutativa, cioè il